

Челябинский государственный университет

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ
ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

Методические указания

**Челябинск
2000**

Министерство образования
Российской Федерации

Челябинский государственный университет

Интегрирование функций одной переменной

Методические указания

Челябинск 2000

Одобрено учебно-методическим советом математического факультета Челябинского государственного университета.

Методические указания содержат изложение методов нахождения неопределенных интегралов от различных функций, вычисления определенных интегралов, собственных и несобственных, а также методы исследования сходимости несобственных интегралов.

Предназначены для студентов первого курса специальности "Прикладная математика".

Составитель: канд. физ.-мат. наук, доц. В.Е.Федоров

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. А.С.Макаров

Содержание

1 Таблица простейших интегралов	3
2 Замена переменной	4
3 Интегрирование по частям	7
4 Интегрирование рациональных функций	8
5 Метод Остроградского	13
6 Тригонометрические функции	16
7 Интегрирование иррациональных функций	18
8 Определенный интеграл	24
9 Признаки сравнения	26
10 Признак Абеля - Дирихле	32
11 Главное значение в смысле Коши	34

1 Таблица простейших интегралов

Определение 1. Функция F называется *первообразной* для функции f на множестве X , если для всех $x \in X$ $F'(x) = f(x)$. В дальнейшем множество X указывать не будем. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается $\int f(x)dx$. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольная константа.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

$$d \int f(x)dx = f(x)dx; \quad \left(\int f(x)dx \right)' = f(x);$$

$$\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C;$$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

ТАБЛИЦА ПРОСТЕЙШИХ ИНТЕГРАЛОВ

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1 \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1 \quad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \quad \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad a \neq 0 \quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \quad a \neq 0 \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 dx} = \operatorname{th} x + C$$

Приведем некоторые примеры вычисления неопределенных интегралов.

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^3 + \sqrt{x})^2 dx}{\sqrt{x}} &= \int \frac{x^6 + 2x^3\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} dx = \\ \int x^{11/2} dx + 2 \int x^3 dx + \int \sqrt{x} dx &= \frac{2}{13}x^6\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^{3/2} + C. \\ \int 2^{2x}5^x dx &= \int (2^2 \cdot 5)^x dx = \int 20^x dx = \frac{20^x}{\ln 20} + C. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ. Применяя таблицу простейших интегралов решить задания № 1628 - 1673. (Здесь и в дальнейшем задания даются из [1].)

2 Замена переменной

Используя формулу для дифференциала функции

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)dx,$$

с помощью замены $\varphi(x) = u$ часто удается упростить подынтегральное выражение вида

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C,$$

где $F(u)$ – первообразная для функции $f(u)$.

Приведем некоторые формулы для преобразования дифференциалов:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{a}d(ax + b), & \frac{dx}{x} &= d \ln x, \\ x^\alpha dx &= \frac{dx^{\alpha+1}}{\alpha + 1}, & a^x dx &= \frac{da^x}{\ln a}, \\ \cos x dx &= d \sin x, & \sin x dx &= -d \cos x. \end{aligned}$$

Рассмотрим несколько примеров.

$$\int \frac{dx}{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x} = \int \frac{d \operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} x} = \left| u = \operatorname{arctg} x \right| =$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\arctg x| + C.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{4+x^4} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{4+x^4} = \left| u = x^2 \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{2^2+u^2} = \\ &\frac{1}{4} \arctg \frac{u}{2} + C = \frac{1}{4} \arctg \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Иногда при интегрировании функции, содержащей в знаменателе неразложимые квадратные трехчлены (с отрицательным дискриминантом), надо выделить в трехчлене полный квадрат. Общее правило выделения полного квадрата в неразложимом трехчлене:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4c - b^2}{4a}.$$

Рассмотрим простейшие примеры.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1/2)^2 + 3/4}} = \int \frac{d(x+1/2)}{\sqrt{(x+1/2)^2 + 3/4}} = \\ &\ln |x+1/2 + \sqrt{(x+1/2)^2 + 3/4}| + C = \ln |x+1/2 + \sqrt{x^2+x+1}| + C. \\ \int \frac{dx}{2x^2+x+1} &= \int \frac{dx}{2(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1/4)^2 + 7/16} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{7} \int \frac{dx}{\left(\frac{4x}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{7}} \int \frac{d\left(\frac{4x}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)}{\left(\frac{4x}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \arctg \left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}} \right) + C. \end{aligned}$$

Иногда удобнее проводить замену переменных в обратном порядке. Пусть $x(t)$ и $t(x)$ взаимнообратные и непрерывно дифференцируемые функции. Если $\Phi(t)$ – первообразная для функции $f(x(t))x'(t)$, то

$$\int f(x) dx = \int f(x(t))x'(t) dt = \Phi(t) + C = \Phi(t(x)) + C.$$

Функция $x(t)$ подбирается так, чтобы упростить подынтегральное выражение.

$$\begin{aligned} \int (x+3)^2 \sqrt{x-1} dx &= \left| x-1 = t, \quad dx = dt \right| = \int (t+4)^2 \sqrt{t} dt = \\ &= \int t^{5/2} dt + 8 \int t^{3/2} dt + 16 \int t^{1/2} dt = \frac{2}{7} t^{7/2} + \frac{16}{5} t^{5/2} + \frac{32}{3} t^{3/2} + C = \\ &= \frac{2}{7} (x-1)^3 \sqrt{x-1} + 3 \frac{1}{5} (x-1)^2 \sqrt{x-1} + 10 \frac{2}{3} (x-1) \sqrt{x-1} + C. \end{aligned}$$

Если дробных степеней от выражений вида $\frac{ax+b}{cx+d}$ несколько, то делаем замену

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^p,$$

где p – наибольший общий знаменатель всех показателей степеней.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{\frac{x}{1+x}} dx}{(1+x)^2 \left(1 + \sqrt[3]{\frac{x}{1+x}}\right)} &= \left| \frac{x}{1+x} = z^6, \quad dx = \frac{6z^5 dz}{(1-z^6)^2} \right| = \int \frac{z^3 \cdot 6z^5 dz}{1+z^2} = \\ &= 6 \int \left(z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{1+z^2} \right) dz = \\ &= \frac{6}{7} z^7 - \frac{6}{5} z^5 + 2z^3 - 6z + 6 \operatorname{arctg} z + C = \\ &= \frac{6}{7} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{7/6} - \frac{6}{5} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{5/6} + \sqrt{\frac{x}{1+x}} - 6 \sqrt[6]{\frac{x}{1+x}} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{\frac{x}{1+x}} + C. \end{aligned}$$

При этом мы разделили z^8 на $1+z^2$.

Вычислим еще несколько интегралов.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+e^x} &= \left| e^x = y, \quad x = \ln y, \quad dx = \frac{dy}{y} \right| = \int \frac{dy}{y(1+y)} = \\ &\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y+1} = \ln \left| \frac{y}{1+y} \right| + C = \ln \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right) + C. \\ \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\sin x dx}{1-\cos^2 x} = - \int \frac{d \cos x}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \right) + C. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ. Используя методы, изложенные в данном параграфе, вычислить интегралы № 1674 - 1740, 1836 - 1843.

3 Интегрирование по частям

Если $u(x)$, $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, то справедлива формула интегрирования по частям

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x) \quad \text{или}$$

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Приведем наиболее типичные примеры.

$$\int \ln x dx = \left| u = \ln x, v = x \right| = x \ln x - \int x d \ln x = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

$$\int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int x d \sin 2x = \left| u = x, v = \sin 2x \right| =$$

$$\frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int x^2 d e^{3x} = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} 2x dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} \int x d e^{3x} = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{9} \int e^{3x} dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C.$$

Такие интегралы аналогичным образом вычисляются и в случае, когда в первом интеграле вместо множителя x или во втором интеграле вместо множителя x^2 стоит некоторый многочлен степени n . При этом надо интегрировать последовательно по частям n раз.

Интегралы следующих типов выражаются сами через себя.

$$I = \int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{1}{2} \int \sin 3x d e^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{1}{2} \int e^{2x} d \sin 3x =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4} \int \cos 3x d e^{2x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} \int e^{2x} d \cos 3x = \\
&= \frac{1}{4}e^{2x}(2 \sin 3x - 3 \cos 3x) - \frac{9}{4} \int e^{2x} \sin 3x dx = \\
&= \frac{1}{4}e^{2x}(2 \sin 3x - 3 \cos 3x) - \frac{9}{4}I
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{13}{4}I = \frac{1}{4}e^{2x}(2 \sin 3x - 3 \cos 3x), \quad I = \frac{1}{13}e^{2x}(2 \sin 3x - 3 \cos 3x).$$

$$\begin{aligned}
J &= \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int x d \sqrt{a^2 - x^2} = \\
&= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int x \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\
&= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\
&= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\
&= x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - J + C_1.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$J = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Применяя метод интегрирования по частям, вычислить интегралы № 1791 - 1831.

4 Интегрирование рациональных функций

Рациональной называется функция вида $\frac{R_l(x)}{Q_n(x)}$, где $R_l(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены степени l и n соответственно.

Если $l \geq n$, то можно выделить целую часть дроби

$$\frac{R_l(x)}{Q_n(x)} = S_{l-n}(x) + \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $S_{l-n}(x)$, $P_m(x)$ – многочлены степени $l - n$ и m соответственно, $m < n$. Поэтому интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad m < n.$$

При этом можно считать коэффициент при x^n равным единице.

Первым шагом при вычислении интеграла от функции такого вида является разложение знаменателя на множители

$$Q_n(x) = (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_i)^{k_i} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_jx + q_j)^{l_j},$$

где a_1, a_2, \dots, a_i – корни многочлена $Q_n(x)$ кратности k_1, k_2, \dots, k_i соответственно, а трехчлены $x^2 + p_lx + q_l$, $l = 1, \dots, j$, не имеют действительных корней ($p_l^2 - 4q_l < 0$). При этом $\sum_{r=1}^i k_r + 2 \sum_{r=1}^j l_r = n$.

Следующим шагом является представление дроби в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= \frac{A_1^{(1)}}{x - a_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x - a_1)^{k_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{x - a_2} + \dots + \frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x - a_2)^{k_2}} + \\ &+ \frac{A_1^{(i)}}{x - a_i} + \dots + \frac{A_{k_i}^{(i)}}{(x - a_i)^{k_i}} + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_2^{(1)}x + C_2^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \\ &+ \frac{B_{l_1}^{(1)}x + C_{l_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \dots + \frac{B_{l_j}^{(j)}x + C_{l_j}^{(j)}}{x^2 + p_jx + q_j} + \dots + \frac{B_{l_j}^{(j)}x + C_{l_j}^{(j)}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{l_j}}. \end{aligned}$$

Здесь $A_1^{(1)}, \dots, A_{k_i}^{(i)}$, $B_1^{(1)}, \dots, B_{l_j}^{(j)}$, $C_1^{(1)}, \dots, C_{l_j}^{(j)}$ – некоторые числа, которые находятся методом неопределенных коэффициентов. Заключается он в том, что правая часть последнего равенства приводится к общему знаменателю. В числите получившегося выражения получается некоторый многочлен степени m , коэффициенты которого, выраженные через искомые константы, надо приравнять к коэффициентам многочлена $P_m(x)$. Получится система $m + 1$ линейного уравнения. Рассмотрим пример

$$I = \int \frac{4x^2 + 3}{(2x^2 - 8)(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{4x^2 + 3}{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)^2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 + 3}{(x-2)(x+2)(x^2+1)^2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} = \\ &\quad \frac{A(x+2)(x^2+1)^2 + B(x-2)(x^2+1)^2}{(x^2-4)(x^2+1)^2} + \\ &\quad \frac{(Cx+D)(x^2-4)(x^2+1) + (Ex+F)(x^2-4)}{(x^2-4)(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

$$4x^2 + 3 = (A+B+C)x^5 + (2A-2B+D)x^4 + (2A+2B-3C+E)x^3 + \\ + (4A-4B-3D+F)x^2 + (A+B-4C-4E)x + (2A-2B-4D-4F).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0, & 2A - 2B + D &= 0, \\ 2A + 2B - 3C + E &= 0, & 4A - 4B - 3D + F &= 4, \\ A + B - 4C - 4E &= 0, & 2A - 2B - 4D - 4F &= 3. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим значения $A = 0,19$, $B = -0,19$, $C = E = 0$, $D = -0,76$, $F = 0,2$. Поэтому

$$I = 0,095 \int \frac{dx}{x-2} - 0,095 \int \frac{dx}{x+2} - 0,38 \int \frac{dx}{x^2+1} + 0,1 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \quad (4.1).$$

Есть другие методы нахождения коэффициентов разложения, которые не столь универсальны, как изложенный выше, но в частных случаях бывают гораздо удобнее. Например, если знаменатель имеет только действительные простые (кратности один) корни, можно поступить следующим образом.

$$\frac{2x^2 + 4x - 5}{(x^2 - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}.$$

$$2x^2 + 4x - 5 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1).$$

Положим поочередно $x = 1$, $x = -1$, $x = -2$. Получим равенства

$$1 = 6A, \quad -7 = -2B, \quad -5 = 3C.$$

Отсюда $A = 1/6$, $B = 7/2$, $C = -5/3$.

$$\int \frac{2x^2 + 4x - 5}{(x^2 - 1)(x + 2)} = \frac{1}{6} \ln|x-1| + 3\frac{1}{2} \ln|x+1| - 1\frac{2}{3} \ln|x+2| + C.$$

Если знаменатель имеет действительные корни, среди которых есть корни кратности больше единицы, то поступим так:

$$\frac{-x^2 + 3x + 7}{(x+3)(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+3}.$$

$$-x^2 + 3x + 7 = A(x+1)(x+3) + B(x+3) + C(x+1)^2. \quad (4.2)$$

Положим $x = -1$, тогда $3 = 2B$, $B = 3/2$. Теперь положим $x = -3$, получим $-11 = 4$, $C = -11/4$. Осталось найти A . Продифференцируем тождество (4.2):

$$-2x + 3 = A(2x+4) + B + 2C(x+1).$$

Положим x равным значению кратного корня, то есть $x = -1$, тогда $5 = 2A + B = 2A + 3/2$, $A = 7/4$.

$$\begin{aligned} \int \frac{-x^2 + 3x + 7}{(x+3)(x+1)^2} dx &= \frac{7}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{11}{4} \int \frac{dx}{x+3} = \\ &= 1,75 \ln|x+1| - \frac{1,5}{x+1} - 2,75 \ln|x+3| + C. \end{aligned}$$

Итак, разбивая правильную дробь на простейшие, мы ее интегрирование сводим к интегрированию дробей следующих видов:

$$1) \frac{A}{x-a}; \quad 2) \frac{B}{(x-a)^k}; \quad 3) \frac{Cx+D}{x^2+px+q}; \quad 4) \frac{Cx+D}{(x^2+px+d)^l}.$$

Посчитаем интегралы от этих дробей:

$$\begin{aligned} 1) \quad \int \frac{A}{x-a} dx &= A \ln|x-a| + C. \\ 2) \quad \int \frac{B}{(x-a)^k} dx &= \frac{B}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C. \\ 3) \quad \int \frac{Cx+D}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{Cx+D}{(x+p/2)^2 + \frac{4q-p^2}{4}} dx = \\ &= \left| x+p/2 = u, \quad \frac{4q-p^2}{4} = b, \quad D - C\frac{p}{2} = E \right| = \int \frac{Cu+E}{u^2+b} du = \\ &= C \int \frac{udu}{u^2+b} + E \int \frac{du}{u^2+b} = \frac{C}{2} \int \frac{d(u^2+b)}{u^2+b} + E \int \frac{du}{u^2+b} = \end{aligned}$$

$$= \frac{C}{2} \ln(u^2 + b) + \frac{E}{\sqrt{b}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{b}} + C_1 =$$

Здесь надо заметить, что $b = -\mathcal{D}/4 > 0$, так как \mathcal{D} – дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + px + q$, не имеющего действительных корней, а значит, отрицательный.

$$\begin{aligned} &= \frac{C}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2D - Cp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C_1. \\ 4) \quad &\int \frac{Cx + D}{(x^2 + px + q)^l} dx = \int \frac{\frac{C}{2}(2x + p) + \left(D - \frac{Cp}{2}\right)}{(x^2 + px + q)^l} dx = \\ &= \frac{C}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^l} dx + \left(D - \frac{Cp}{2}\right) \int \frac{d(x + p/2)}{\left((x + p/2)^2 + \frac{4q - p^2}{4}\right)^l} = \\ &= \left| x + p/2 = u, \quad \frac{4q - p^2}{4} = b \right| = \\ &= \frac{C}{2(1-l)} (x^2 + px + q)^{1-l} + \left(D - \frac{Cp}{2}\right) \int \frac{du}{(u^2 + b)^l}. \end{aligned}$$

В последнем интеграле делается подстановка $u = \sqrt{b} \operatorname{tg} z$:

$$\int \frac{du}{(u^2 + b)^l} = b^{\frac{1}{2}-l} \int \cos^{2(l-1)} dz.$$

Вычисление интегралов такого вида мы еще рассмотрим в п. 6.

Еще один способ вычисления интеграла $I_l = \int \frac{du}{(u^2 + b)^l}$ – использовать рекуррентное соотношение, которое мы сейчас установим.

$$\begin{aligned} I_l &= \int \frac{du}{(u^2 + b)^l} = \frac{1}{b} \int \frac{u^2 + b - u^2}{(u^2 + b)^l} du = \\ &= \frac{1}{b} \int \frac{du}{(u^2 + b)^{l-1}} - \frac{1}{2} \int \frac{u}{(u^2 + b)^l} d(u^2 + b) = \\ &= \frac{1}{b} I_{l-1} - \frac{1}{2} \int u d \left(\frac{(u^2 + b)^{1-l}}{1-l} \right) = \\ &= \frac{1}{b} I_{l-1} + \frac{1}{2(l-1)} u (u^2 + b)^{1-l} - \frac{1}{2(l-1)} \int \frac{du}{(u^2 + b)^{l-1}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2l - b - 2}{2b(l - 1)} I_{l-1} - \frac{u}{2(l - 1)(u^2 + b)^{l-1}} = I_l.$$

Например, посчитаем интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} I_1 - \frac{x}{2(x^2 + 1)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2(x^2 + 1)} + C.$$

Досчитаем интеграл (4.1)

$$I = 0,095 \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| - 0,33 \operatorname{arctg} x - 0,05 \frac{x}{x^2 + 1} + C.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Решить задания № 1866 -1889.

5 Метод Остроградского

Пусть знаменатель несократимой правильной дроби $P_m(x)/Q_n(x)$ имеет вид

$$Q_n(x) = (x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_i)^{k_i} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_jx + q_j)^{l_j}.$$

Метод Остроградского заключается в использовании формулы

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \frac{R(x)}{S(x)} + \int \frac{T(x)}{U(x)} dx.$$

В ней многочлены $S(x)$ и $U(x)$ имеют вид

$$S(x) = (x - a_1)^{k_1 - 1} \dots (x - a_i)^{k_i - 1} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1 - 1} \dots (x^2 + p_jx + q_j)^{l_j - 1},$$

$$U(x) = (x - a_1) \dots (x - a_i) (x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_jx + q_j)$$

соответственно и могут быть вычислены без разложения многочлена $Q_n(x)$ на произведение неприводимых множителей.

Действительно, $S(x)$ является наибольшим общим делителем двух многочленов $Q_n(x)$ и $Q'_n(x)$ и может быть вычислен при помощи алгоритма Евклида, который излагается в курсе алгебры.

Многочлен $U(x)$ представляет собой частное $Q_n(x)/S(x)$ и может быть вычислен посредством деления $Q_n(x)$ на $S(x)$ столбиком.

Остается вычислить многочлены $R(x)$ и $T(x)$ как многочлены с неопределенными коэффициентами степени на единицу ниже, чем

$S(x)$ и $U(x)$ соответственно. Для вычисления указанных неопределенных коэффициентов следует продифференцировать формулу Остроградского, привести результат дифференцирования к общему знаменателю и сопоставить коэффициенты при одинаковых степенях x в чисителях.

Метод Остроградского особенно эффективен, когда корни $Q_n(x)$ в основном являются кратными или когда вызывает затруднение нахождение корней $Q_n(x)$.

Вычислим

$$\int \frac{6 - 7x - x^2}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} dx.$$

Имеем

$$Q_n(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1,$$

$$Q'_n(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2.$$

Наибольший общий делитель этих многочленов равен

$$S(x) = x^2 - x + 1.$$

Поделив $Q_n(x)$ на $S(x)$ "столбиком", найдем

$$U(x) = x^2 - x + 1.$$

$R(x)$ и $T(x)$ задаем как многочлены первой степени с неопределенными коэффициентами, и формула Остроградского принимает вид

$$\int \frac{6 - 7x - x^2}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} dx = \frac{Ax + B}{x^2 - x + 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1} dx.$$

Продифференцируем эту формулу:

$$\begin{aligned} & \frac{6 - 7x - x^2}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} = \\ & = \frac{A(x^2 - x + 1) - (Ax + B)(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1}. \end{aligned}$$

Результат дифференцирования приводим к общему знаменателю, после чего сопоставляем числители. Получим

$$6 - 7x - x^2 = A(x^2 - x + 1) - (Ax + B)(2x - 1) + (Cx + D)(x^2 - x + 1).$$

Сравнивая коэффициенты при x^0, x^1, x^2 и x^3 , получим систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} C = 0, \\ -A + D - C = -1, \\ -2B - D + C = -7, \\ A + B + D = 6. \end{array} \right\}$$

Решая эту систему, найдем $A = 2, B = 3, C = 0, D = 1$. Таким образом формула Остроградского принимает вид

$$\int \frac{6 - 7x - x^2}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} dx = \frac{2x + 3}{x^2 - x + 1} + \int \frac{dx}{x^2 - x + 1}.$$

Вычислим интеграл в правой части:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{dx}{(x - 1/2)^2 + 3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{6 - 7x - x^2}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1} dx = \frac{2x + 3}{x^2 - x + 1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Рассмотрим еще один пример.

$$I = \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

Разложим знаменатель на множители:

$$x^4 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + cx + 1) = x^4 + (a+c)x^3 + (2+ac)x^2 + (a+c)x + 1.$$

Отсюда $a + c = 0, 2 + ac = 0, a = \sqrt{2}, c = -\sqrt{2}$.

$$\frac{x^2 + 1}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

Приравниваем коэффициенты:

$$A + C = 0, \quad \sqrt{2}(C - A) + B + D = 1, \quad A + C + \sqrt{2}(D - B) = 0,$$

$$B + D = 1; \quad A = C = 0, \quad B = D = \frac{1}{2}.$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} =$$

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{2}x+1)^2+1} + \int \frac{dx}{(\sqrt{2}x-1)^2+1} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)) + C.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Применяя метод Остроградского, найти интегралы № 1891 - 1897.

6 Тригонометрические функции

При интегрировании тригонометрических функций часто оказываются полезными следующие формулы:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin \alpha \sin \beta = 1/2(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = 1/2(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = 1/2(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

Например,

$$\int \sin(\alpha x) \cos(\beta x) dx = \frac{1}{2} \int \sin((\alpha + \beta)x) dx + \frac{1}{2} \int \sin((\alpha - \beta)x) dx = \\ = \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \int \sin((\alpha + \beta)x) d((\alpha + \beta)x) + \\ + \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \int \sin((\alpha - \beta)x) d((\alpha - \beta)x) = \\ = -\frac{1}{2(\alpha + \beta)} \cos((\alpha + \beta)x) - \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \cos((\alpha - \beta)x) + C.$$

Иногда удобно использовать формулу $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ следующим образом:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \\ = \left| t = \sin x \right| = \int \frac{dt}{1-t^2} + \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{t} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) - \frac{1}{\sin x} + C.$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \quad (6.1)$$

с рациональной функцией R .

При любой функции R такой интеграл сводится к интегралу от рациональной функции (см. пп. 4,5) с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*:

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \\ \int \frac{dx}{3+2\sin x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{4t}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{3t^2+4t+3} = \\ \frac{2}{3} \int \frac{dt}{(t+2/3)^2+5/9} &= \frac{6}{5} \int \frac{dt}{\left(\frac{3t+2}{\sqrt{5}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t+2}{\sqrt{5}} + C = \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{\sqrt{5}} &+ C. \end{aligned}$$

В некоторых случаях процедуру сведения интеграла (6.1) к интегралу от рациональной функции можно упростить. Рассмотрим эти случаи.

1). Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то удобнее воспользоваться подстановкой

$$t = \cos x, \quad dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

2). При условии $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, проще всего использовать замену

$$t = \sin x, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

3). В случае $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, поможет подстановка

$$t = \operatorname{tg} x, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \sin x = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}} \operatorname{tg} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{\frac{2t}{1+t^2} \frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} \frac{1}{(1+t^2)^2}} = 2 \int \frac{1+t^2}{t} dt.$$

$$2 \int \frac{dt}{t} + 2 \int t dt = 2 \ln |t| + t^2 + C = 2 \ln |\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg}^2 x + C.$$

Интеграл вида

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x) dx$$

можно рационализировать посредством подстановки $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$, при этом

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Посчитать интегралы № 1741 - 1765.

7 Интегрирование иррациональных функций

Если подынтегральная функция содержит радикалы вида $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, то часто бывает полезно сделать одну из следующих замен:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \left| x = a \sin t, \quad dx = a \cos t dt \right| = a \cos t,$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \left| x = a \cos t, \quad dx = -a \sin t dt \right| = a \sin t;$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \left| x = \frac{a}{\cos t}, \quad dx = a \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt \right| = a \operatorname{tg} t$$

или

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - a^2} &= \left| x = a \operatorname{ch} t, \quad dx = a \operatorname{sh} t dt \right| = a \operatorname{sh} t; \\ \sqrt{x^2 + a^2} &= \left| x = a \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt \right| = \frac{a}{\cos t}, \\ \sqrt{x^2 + a^2} &= \left| x = a \operatorname{sh} t, \quad dx = a \operatorname{ch} t dt \right| = a \operatorname{ch} t.\end{aligned}$$

В следующем интеграле воспользуемся последней из замен.

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{2}{\operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch} t} \operatorname{ch} t dt = 2 \int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -2 \operatorname{cth} t + C = \\ &= -2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.\end{aligned}$$

Иногда могут помочь тригонометрические или гиперболические подстановки другого вида:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx &= \left| x-a = (b-a) \sin^2 t, \quad dx = 2(b-a) \sin t \cos t dt \right| \\ &= \int \sqrt{(b-a)^2 \sin^2 t \cos^2 t} 2(b-a) \sin t \cos t dt = \frac{1}{2} \int (b-a)^2 \sin^2 2t dt = \\ &= \frac{(b-a)^2}{4} \int (1 - \cos 4t) dt = \frac{(b-a)^2}{16} (4t - \sin 4t) dt = \\ &= \frac{(b-a)^2}{16} \left(4 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} - 4 \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}(b+a-2x)}{(b-a)^2} \right) + C = \\ &= \frac{(b-a)^2}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} - \frac{1}{4}(b+a-2x)\sqrt{(x-a)(b-x)} + C.\end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Найти интегралы № 1778 - 1781, 1786 - 1789, 1991 - 2040.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int \frac{R_l(x)}{Q_n(x) \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad (7.1).$$

Выделим из рациональной функции целую часть

$$\frac{R_l(x)}{Q_n(x)} = S_{l-n}(x) + \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

и разложим правильную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ на сумму простейших дробей. После этого задача о нахождении интеграла (7.1) сводится к нахождению интегралов

$$1) \int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (7.2)$$

$$2) \int \frac{dx}{(x - \alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad (7.3)$$

$$3) \int \frac{(Ax + B)dx}{(x^2 + px + q)^l \sqrt{ax^2 + bx + c}}. \quad (7.4)$$

Интеграл (7.2) считается с помощью формулы

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Чтобы найти коэффициенты многочлена Q_{n-1} степени $n-1$ и число λ , надо продифференцировать эту формулу.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 + 4x + 3} + \\ &\quad + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}. \end{aligned}$$

После дифференцирования получим

$$\begin{aligned} &\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \\ &= \frac{(2Ax + B)(x^2 + 4x + 3) + (Ax^2 + Bx + C)(x + 2) + \lambda}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}. \end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты

$$3A = 1, \quad , 10A + 2B = -6, \quad 6A + 6B + C = 11, \quad 3B + 2C + \lambda = -6.$$

Отсюда

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{14}{3}, \quad C = 37, \quad \lambda = -66.$$

$$I = \left(\frac{1}{3}x^2 - 4\frac{2}{3}x + 37 \right) \sqrt{x^2 + 4x + 3} - 66 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 - 1}} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^2 - 4\frac{2}{3}x + 37 \right) \sqrt{x^2 + 4x + 3} - 66 \ln |x+2+\sqrt{x^2 + 4x + 3}| + C.$$

Посчитаем теперь интеграл (7.3) с помощью замены $x - \alpha = t^{-1}$. Получим

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x-\alpha)^l \sqrt{ax^2 + bx + c}} = \\ &= \int \frac{dx}{(x-\alpha)^l \sqrt{a(x-\alpha)^2 + (b+2a\alpha)(x-\alpha) + c + a\alpha^2 + b\alpha}} = \\ &= \int \frac{dx}{(x-\alpha)^l \sqrt{a(x-\alpha)^2 + b_1(x-\alpha) + c_1}} = \\ &= \int \frac{dx}{(x-\alpha)^{l+1} \sqrt{a + \frac{b_1}{x-\alpha} + \frac{c_1}{(x-\alpha)^2}}} = \\ &= \left| x - \alpha = t^{-1}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2} \right| = - \int \frac{t^{l-1} dt}{\sqrt{a + b_1 t + c_1 t^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл сведен к предыдущему (7.2).

Осталось рассмотреть интеграл (7.4). В случае $p = b/a$ делаем замену $x = t - p/2$. Когда $p \neq b/a$, нужна замена $x = \frac{\alpha t + \beta}{t+1}$, при этом α и β подбираются такими, чтобы в трехчленах не осталось членов с первой степенью. Для этого надо решить относительно α и β уравнения

$$2\alpha\beta + p(\alpha + \beta) + 2q = 0, \quad 2a\alpha\beta + b(\alpha + \beta) + 2c = 0. \quad (7.5)$$

После замены получим интегралы

$$A \int \frac{tdt}{(t^2 + \gamma)^l \sqrt{\delta t^2 + \varepsilon}} + B \int \frac{dt}{(t^2 + \gamma)^l \sqrt{\delta t^2 + \varepsilon}}.$$

В первом из них применяем подстановку $u = \sqrt{\delta t^2 + \varepsilon}$, во втором – подстановку $v = (\sqrt{\delta t^2 + \varepsilon})'$.

Рассмотрим соответствующие примеры. Первый случай ($p = b/a$):

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(x+1)dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}} = \left| x = t+1 \right| = \int \frac{(t+2)dt}{(t^2+3)\sqrt{3-t^2}} = \\ &= \left| \sqrt{3-t^2} = u, \quad tdt = -udu, \quad (\sqrt{3-t^2})' = v, \quad t = \frac{\sqrt{3}v}{\sqrt{1+v^2}} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int \frac{udu}{u(6-u^2)} + 2 \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{(1+v^2)^{3/2}} dv}{\frac{3+6v^2}{1+v^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+v^2}}} = - \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6}+u}{\sqrt{6}-u} \right| + \frac{2}{3} \int \frac{dv}{1+2v^2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}} \right| + \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}v) + C = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}} \right| + \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}x}{\sqrt{2+2x-x^2}} \right) + C.
\end{aligned}$$

Случай второй ($p \neq b/a$):

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Решаем систему (7.5)

$$2\alpha\beta - \alpha - \beta + 2 = 0, \quad 2\alpha\beta + \alpha + \beta + 2 = 0.$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1.$$

Делаем замену

$$x = \frac{t-1}{t+1}, \quad dx = \frac{2dt}{(t+1)^2}.$$

$$I = \int \frac{2(t+1)dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}.$$

Дальше интеграл считается совершенно аналогично предыдущему.

Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac \neq 0,$$

где $R(\cdot, \cdot)$ – рациональная функция, можно свести к интегралам от рациональных функций посредством одной из *подстановок Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{ax}, \quad a > 0,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm tx \pm \sqrt{c}, \quad c > 0,$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t(x - x_1), \quad b^2 - 4ac > 0,$$

где x_1 – один из корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \left| \sqrt{x^2 + x + 1} = tx + 1, \quad x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}, \right. \\ dx &= \left. \frac{2 - 2t + 2t^2}{(1 - t^2)^2} dt \right| = \int \frac{\frac{2 - 2t + 2t^2}{(1 - t^2)^2} dt}{\frac{2t - 1}{1 - t^2} + \frac{2t^2 - t}{1 - t^2} + 1} = \\ &= \int \frac{2 - 2t + 2t^2}{(1 - t^2)(t^2 + t)} dt. \\ \frac{2 - 2t + 2t^2}{(1 - t^2)(t^2 + t)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{1 - t} + \frac{C}{1 + t} + \frac{D}{(1 + t)^2}. \end{aligned}$$

$$2 - 2t + 2t^2 = A(1 - t^2)(1 + t) + Bt(1 + t)^2 + Ct(1 - t^2) + Dt(1 - t).$$

$$-A + B - C = 0, \quad -A + 2B - D = 2, \quad A + B + C + D = -2, \quad A = 2.$$

$$B = 1/2, \quad C = -3/2, \quad D = -3.$$

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1 - t} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{1 + t} - 3 \int \frac{dt}{(1 + t)^2} = \\ &= 2 \ln |t| - \frac{1}{2} \ln |1 - t| - \frac{3}{2} \ln |1 + t| + \frac{3}{1 + t} + C = \\ &= 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x} \right| - \\ &\quad - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x} \right| + \frac{3x}{x - 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}} + C. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 2. С помощью подстановок Эйлера посчитать интегралы № 1967 - 1970.

Интеграл вида

$$\int x^m (ax^n + b)^p dx, \tag{7.6}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$, причем $a, b, n, p \neq 0$, называют *интегралом от дифференциального бинома*. Интеграл (7.6) сводится к интегралу от рациональной функции в следующих трех случаях:

$p \in \mathbb{Z}$ – подстановкой $x = t^q$, где q – общий знаменатель m, n ;

$\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ – подстановкой $ax^n + b = t^q$, где q – знаменатель p ;

$p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ – подстановкой $a + bx^{-n} = t^q$, где q – знаменатель p .

Рассмотрим пример.

$$I = \int \sqrt[3]{3x - x^3} dx.$$

Здесь

$$m = p = 1/3, \quad n = 2, \quad a = -1, \quad b = 3, \quad p + \frac{m+1}{n} = 1.$$

Делаем замену

$$3 - \frac{1}{x^2} = t^3, \quad dx = \frac{3t^2 dt}{2(3-t^3)^{3/2}}, \quad \sqrt[3]{3x - x^3} = \frac{\sqrt[3]{8 - 3t^3}}{\sqrt{3 - t^3}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt[3]{8 - 3t^3}}{\sqrt{3 - t^3}} \cdot \frac{3t^2 dt}{2(3-t^3)^{3/2}} = \left| t^3 = u \right| = \int \frac{\sqrt[3]{8 - 3u}}{2(3-u)^2} du = \\ &= \left| 8 - 3u = v^3, \quad du = -v^2 dv \right| = \\ &= -\frac{9}{2} \int \frac{v^3 dv}{(v^3 + 1)^2} = -\frac{9}{2} \int \frac{v^3 dv}{(v+1)^2(v^2-v+1)^2}. \end{aligned}$$

Дальше интеграл считается так, как это делается в пп. 4,5.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Посчитать интегралы № 1981 - 1988.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Применяя различные методы, изложенные выше, найти интегралы № 1851 - 1865, 1926 - 1950, 1952 - 1965, 1971 - 1979, 2126 - 2171.

8 Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, n-1}$. Интегралом Римана от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется число

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max_{0 \leq i \leq n-1} |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

При этом, если интеграл существует, то функция называется *интегрируемой* на $[a, b]$.

Если функция определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – ее первообразная, то справедлива *формула Ньютона-Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда *формула интегрирования по частям* для определенных интегралов приобретает вид

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \\ \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{x^2 + 1} = \\ \frac{3 \operatorname{arctg} \sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x - x) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Тогда имеет место *формула замены переменной*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \left| x+1 = t^{-1} \right| = - \int_1^{4/7} \frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{4/7}^1 \frac{dt}{\sqrt{(t-1/2)^2 + 1/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t + \frac{1}{2}} \right|_{4/7}^1 = \\
& = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \frac{1+\sqrt{2}}{2} - \ln \frac{1+5\sqrt{2}}{14} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{7(1+\sqrt{2})}{1+5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9+4\sqrt{2}}{7}. \\
& \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \left| \sqrt{e^x - 1} = y, \quad x = \ln(1+y^2), \quad dx = \frac{2ydy}{1+y^2} \right| = \\
& = 2 \int_0^1 \frac{y^2 dy}{1+y^2} = 2(y - \operatorname{arctg} y) \Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}. \\
& \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \left| \arcsin \sqrt{x} = y, \quad x = \sin^2 y \right| = \\
& = \int_0^{\pi/2} \frac{2y \sin y \cos y dy}{\sin y \cos y} = y^2 \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ. Посчитать интегралы № 2206 - 2213, 2239 - 2250, 2268 - 2280.

9 Признаки сравнения

Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ при любом $b > a$. Следующий предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx \tag{9.1}$$

называется *несобственным интегралом первого рода* от функции $f(x)$ на множестве $[a, +\infty)$.

Если функция не ограничена в окрестности точки b и интегрируема на любом отрезке $[a, b - \varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < b - a$, то *несобственным интегралом второго рода* с особенностью в точке b от функции $f(x)$ на множестве $[a, b)$ называется предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (9.2)$$

В отличие от определенных выше, интеграл Римана в смысле предыдущего параграфа называется *собственным*.

Если конечные пределы (9.1) или (9.2) существуют, то соответствующий интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$$

Посчитаем сначала первообразную.

$$\begin{aligned} \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\ln x d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2} \int \ln x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{xdx}{x^2(1+x^2)} = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \int \frac{dx^2}{x^2(1+x^2)} = \\ &= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I &= \left(-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \right) \Big|_0^{+\infty} = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln b}{2(1+b^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{b^2}{1+b^2} \right) - \\ &\quad - \lim_{a \rightarrow 0+} \left(-\frac{\ln a}{2(1+a^2)} + \frac{1}{4} \ln a^2 - \frac{1}{4} \ln(1+a^2) \right) = \\ &= 0 - \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{1}{2} \ln a \left(1 - \frac{1}{1+a^2} \right) = - \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{a^2 \ln a}{2(1+a^2)} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} &= \left| \sqrt{1-x} = y, \quad x = 1 - y^2 \right| = \int_1^0 \frac{-2ydy}{(1+y^2)y} = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = 2 \arctg y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Последний из посчитанных интегралов изначально был несобственным второго рода, но после замены получился собственный интеграл.

$$\int_0^1 \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_0^1 = -1 - \lim_{a \rightarrow 0^+} (a \ln a - a) = -1.$$

Интеграл (9.1) или (9.2) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится соответствующий интеграл от $|f(x)|$. Из абсолютной сходимости следует сходимость несобственного интеграла.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную особенность в точке b , $b \leq +\infty$, и выполняются неравенства $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in (a, b)$. Тогда из сходимости несобственного интеграла $I_2 = \int_a^b g(x) dx$ следует сходимость $I_1 = \int_a^b f(x) dx$, а из расходимости I_1 – расходимость I_2 . (Это утверждение называется *первым признаком сходимости* несобственных интегралов.) Если же для этих функций к тому же существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

(другими словами, функции $f(x)$ и $Ag(x)$ эквивалентны $f \sim Ag$), то интегралы I_1 и I_2 сходятся или расходятся одновременно. (*Второй признак сходимости* несобственных интегралов.)

Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \tag{9.3}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. Интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \tag{9.4}$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1} = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}.$$

Знаменатель подынтегральной функции вещественных корней не имеет, поэтому ее особенность – только $+\infty$, а первое из слагаемых в правой части равенства – собственный интеграл. На бесконечности $x^4 - x^2 + 1 \sim x^4$, поэтому рассмотрим

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Он сходится, так как $2 > 1$ (см. (9.3)). Следовательно, и наш интеграл сходится.

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\ln x} = - \int_0^1 \frac{dx}{-\ln x} + \int_1^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

Признаки сравнения сформулированы для неотрицательных функций, поэтому мы разбили промежуток интегрирования на два промежутка, на которых подынтегральная функция сохраняет знак. Исследуем получившиеся два интеграла отдельно.

$$\int_0^1 \frac{dx}{-\ln x} = \left| \frac{1}{x} = y \right| = \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2 \ln y} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2}.$$

Последний интеграл сходится, значит, наш интеграл на интервале $(0, 1)$ тоже сходится.

$$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x} = \left| x = 1 + y \right| = \int_0^1 \frac{dy}{\ln(1+y)} \sim \int_0^1 \frac{dy}{y}.$$

Интеграл расходится (см. (9.4)). Здесь мы учли, что единственная особенность у интеграла после замены – в нуле, и использовали эквивалентность $y \sim \ln(1+y)$ при $y \rightarrow 0$. Таким образом, наш исходный

интеграл расходится.

$$I = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Начнем со второго из интегралов. Так как для достаточно большого A при $x > A$ $e^{-x} \leq x^{-p-1}$, то

$$\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \leq \int_1^A x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Первое слагаемое – собственный интеграл, второе – сходящийся несобственный. Их сумма – сходящийся интеграл.

При $x \in (0, 1)$ $e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$, поэтому сходимость интеграла $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$ равносильна сходимости интеграла $\int_0^1 x^{p-1} dx$. Согласно (9.4) он сходится только при $1 - p < 1$. Значит, наш исходный интеграл от нуля до бесконечности сходится при $p > 0$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx = \int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx.$$

На бесконечности $\frac{x^m}{1+x^n} \sim \frac{1}{x^{n-m}}$, поэтому интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ сходится при $n > m + 1$. При $x \rightarrow 0$ $\frac{x^m}{1+x^n} \sim x^m$ и интеграл сходится при $m > -1$. Весь интеграл поэтому сходится при выполнении условий $m > -1$, $n > m + 1$.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx.$$

В окрестности нуля $\frac{\ln(1+x)}{x^n} \sim x^{1-n}$, поэтому первый из интегралов сходится при $n < 2$. Для любого α при достаточно больших x $\ln(1+x) \leq x^\alpha$. Значит, при $n > 1$ $\ln(1+x) \leq x^{\frac{n-1}{2}}$ и $\frac{\ln(1+x)}{x^n} \leq \frac{1}{x^{\frac{n+1}{2}}}$. Интеграл от 1 до $+\infty$ сходится, так как $\frac{n+1}{2} > 1$. При $n \leq 1$ $\frac{\ln(1+x)}{x^n} \geq \frac{1}{x^n}$ и

поэтому интеграл расходится согласно (9.4). Исходный интеграл I от нуля до бесконечности сходится при $n \in (1, 2)$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^n} dx \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx.$$

Поэтому интеграл сходится при $n > 1$. Единственная особенность – на бесконечности. При $n \leq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{1+x^n} dx \geq \frac{\pi}{4} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}.$$

Последний из интегралов расходится, поэтому при соответствующих n расходится исходный интеграл.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}.$$

У первого из слагаемых особенность в нуле. При $x \rightarrow 0 \sin^p x \cos^q x \sim x^p$. Поэтому соответствующий интеграл сходится при $p < 1$. Рассмотрим второй интеграл. У него особенность в точке $\pi/2$. Сделаем замену.

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \left| x = \frac{\pi}{2} - y \right| = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^p x \sin^q x}.$$

Значит, интеграл сходится при $q < 1$. Весь интеграл I сходится при $p, q < 1$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x^2 + 1}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}\sqrt{1+x^{-2}}} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}.$$

Оба слагаемых сходятся.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx = \left| 1/x = y \right| = \int_{+\infty}^1 \frac{-\ln y \frac{-dy}{y^2}}{1-\frac{1}{y^2}} = - \int_1^{+\infty} \frac{\ln y dy}{y^2 - 1} =$$

$$\begin{aligned}
|y - 1| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+z)dz}{z^2 + 2z} \right| &= \int_0^1 \frac{\ln(1+z)dz}{z^2 + 2z} + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+z)dz}{z^2 + 2z} \sim \\
&\sim \int_0^1 \frac{zdz}{2z} + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+z)dz}{z^2 + 2z}.
\end{aligned}$$

Первый из интегралов сходится. Второй оценим сверху:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+z)dz}{z^2 + 2z} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{z}dz}{z^2}.$$

Согласно (9.3) интеграл сходится. Исходный интеграл также сходится.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Вычислить интегралы № 2334 - 2347.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Исследовать на сходимость интегралы № 2358 - 2375.

10 Признак Абеля - Дирихле

Все сформулированные до сих пор признаки касаются абсолютной сходимости, так как они справедливы для неотрицательных функций, в частности для $|f(x)|$. Если интеграл от a до $b \leq +\infty$ сходится, но не абсолютно, то мы будем называть его *условно сходящимся*.

Сформулируем *признак Абеля - Дирихле* условной сходимости: Пусть функция $f(x)$ имеет ограниченную при $x > a$ первообразную, а функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Исследуем интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

на абсолютную и условную сходимость. Так как при $x \rightarrow 0$ $\frac{\sin x}{x} \sim 1$,

то единственная особенность интеграла на бесконечности. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

сходится по признаку Абеля - Дирихле, так как $1/x$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$, а первообразная функции $\sin x$ – это $-\cos x$, ограниченная функция. Проверим наличие абсолютной сходимости.

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

Первый из интегралов в правой части равенства, очевидно, расходится, второй – сходится по признаку Абеля - Дирихле, так как первообразная функции $\cos 2x$, функция $\frac{1}{2} \sin 2x$, ограничена на всей числовой прямой. Поэтому разность интегралов расходится. Значит, по первому признаку сравнения исходный интеграл не является абсолютно сходящимся.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin \left(\frac{1}{\sin x} \right) dx &= \left| \frac{1}{\sin x} = y, \quad x = \arcsin \frac{1}{y}, \quad dx = \frac{-dy}{y\sqrt{y^2-1}} \right| = \\ &\quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin y dy}{y\sqrt{y^2-1}}. \end{aligned}$$

Исследуем последний из интегралов на абсолютную сходимость.

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin y| dy}{y\sqrt{y^2-1}} \leq \int_1^2 \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} + \int_2^{+\infty} \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}.$$

Во втором интеграле при $y \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{y\sqrt{y^2-1}} \sim y^{-2}$, поэтому он сходится. В первом интеграле сделаем замену

$$\int_1^2 \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} = \left| y - 1 = z \right| = \int_0^1 \frac{dz}{(z+1)\sqrt{z(z+2)}}.$$

При $z \rightarrow 0$ $\frac{1}{(z+1)\sqrt{z(z+2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2z}}$ и согласно (9.4) последний интеграл сходится. Значит, исходный интеграл сходится абсолютно.

$$\int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx = \int_0^2 x^2 \cos(e^x) dx + \int_2^{+\infty} \frac{x^2}{e^x} e^x \cos(e^x) dx.$$

Первый интеграл абсолютно сходится, так как

$$\int_0^2 x^2 |\cos(e^x)| dx \leq \int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}.$$

Во втором интеграле функция $x^2 e^{-x}$ монотонно стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. А первообразная функции $e^x \cos(e^x)$ есть функция $\sin(e^x)$. Она ограничена по модулю единицей. По признаку Абеля - Дирихле второй интеграл сходится. Проверим его на абсолютную сходимость:

$$\int_2^{+\infty} x^2 |\cos(e^x)| dx \geq \int_2^{+\infty} x^2 \cos^2(e^x) dx = \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} x^2 dx - \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} x^2 \cos(2e^x) dx.$$

Первый из интегралов расходится, а второй сходится опять же по признаку Абеля - Дирихле. Значит их разность расходится, поэтому исходный интеграл $\int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx$ не является абсолютно сходящимся.

УПРАЖНЕНИЕ. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы № 2379 - 2383.

11 Главное значение в смысле Коши

Пусть при любом $\varepsilon > 0$ существуют собственные интегралы

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx, \quad \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx, \quad c \in (a, b).$$

Тогда интегралом в смысле главного значения по Коши называется число

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right).$$

Аналогично при условии, что функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[-a, a]$, $a > 0$, определим

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x)dx. \\ \text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} &= \text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int_{1+\varepsilon}^{3/2} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} \right) + \\ &\quad + \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left(\int_{3/2}^{2-\delta} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int_{2+\delta}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|_0^{1-\varepsilon} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|_{1+\varepsilon}^{3/2} \right) + \\ &\quad + \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left(\ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|_{3/2}^{2-\delta} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|_{2+\delta}^{+\infty} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\ln \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} - \ln 2 - \ln \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right) + \\ &\quad + \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left(\ln \frac{\delta}{1-\delta} - \ln \frac{\delta}{1+\delta} + \lim_{a \rightarrow +\infty} \ln \frac{a-2}{a-1} \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln \frac{1+\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} + \lim_{\delta \rightarrow 0+} \ln \frac{1+\delta}{1-\delta} = -\ln 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{v.p.} \int_{1/2}^2 \frac{dx}{x \ln x} = \text{v.p.} \int_{1/2}^2 \frac{d \ln x}{\ln x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\ln |\ln x| \Big|_{1/2}^{1-\varepsilon} + \ln |\ln x| \Big|_{1+\varepsilon}^2 \right) = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (\ln |\ln(1-\varepsilon)| - \ln \ln 2 + \ln \ln 2 - \ln \ln(1+\varepsilon)) = \\
&\quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \ln \frac{(-\ln(1-\varepsilon))}{\ln(1+\varepsilon)} = 0. \\
& \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) \Big|_{-a}^a = \\
&= 2 \lim_{a \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} a = \pi.
\end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ. Решить задания № 2390, 2393, 2394.

Список литературы

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - Санкт-Петербург: МИФРИЛ, 1995.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука, 1977.
3. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. - М.: МГУ, 1988.
4. Зорич В.А. Математический анализ. Т.1. - М.: Наука, 1981.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. - М.: Высш. шк., 1988.
6. Свиридов Г.А., Суханова М.В. Практикум по нахождению интегралов (замена переменных, интегрирование по частям): Метод. указания. - Челябинск, 1990.
7. Свиридов Г.А., Суханова М.В. Практикум по нахождению интегралов (рациональные функции): Метод. указания. - Челябинск, 1990.
8. Свиридов Г.А., Федоров В.Е. Математический анализ. Часть I.: Учеб. пособие. - Челябинск, 1999.
8. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. - М.: Наука, 1988.

Интегрирование функций одной переменной

Методические указания

Составитель Федоров Владимир Евгеньевич

Редактор Н.П.Мирдак

Подписано в печать 19.04.2000.

Формат 60x84 1/16. Бумага типографская № 2.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 1,6.

Тираж 200 экз. Заказ 55. Бесплатно

Челябинский государственный университет
454021 Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.

Полиграфический участок Издательского центра ЧелГУ.
454021 Челябинск, ул. Молодогвардейцев, 57-б.